Vrije Universiteit Amsterdam
Wiskunde en Statistiek

Een Vermoeden over Limieten

(door studenten Wiskunde)

R.W. Poldermans en A.E. Weber

2002

Een Vermoeden over Limieten

De vraag van dit onderzoek is: is het volgende vermoeden juist?

Zij f een continue functie gedefinieerd op de positieve halfrechte, $\mathbb{R}_+$. Zij $n \in \mathbb{N}$ en $x \in \mathbb{R}$. Dan:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n+\alpha) = L$$

voor alle $\alpha \in [0,1)$ en eindige L.

In woorden: is het waar dat de uitspraak 'f heeft een eindige limiet, bekeken voor waarden x op de reële halfrechte', equivalent is met 'f heeft dezelfde limiet, bekeken voor discrete punten van de grafiek, met onderlinge afstand 1, voor alle $\alpha \in [0,1)$ die de punten steeds laat opschuiven'? Op het eerste gezicht lijkt dit wel te kloppen. Vooral omdat je bij de stelling met de losse punten, toch alle punten uit $\mathbb{R}_+$ "te pakken" hebt.

In ieder geval is de implicatie naar rechts ($\Longrightarrow$) wel juist. Een bewijs hiervan gaat als volgt:

Neem aan dat het linkerlid waar is. Dat wil zeggen:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ r \in \mathbb{R}_+\ \ \forall\ x > r : |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (\star)$

Neem nu een willekeurige $\alpha \in [0,1)$ en een willekeurige $\theta > 0$ dan geldt met $(\star)$:

$\exists\ r \in \mathbb{R}_+\ \ \forall\ x > r : |f(x) - L| < \theta$

Kies nu $N = [r] + 1$, dan geldt: $\forall\ x > N : |f(x) - L| < \theta$

Dus zeker, als $n \in \mathbb{N}$: $\forall\ n > N : |f(n+\alpha) - L| < \theta$

We concluderen: $\forall\ \theta > 0\ \ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n > N : |f(n+\alpha) - L| < \theta$

En dit is precies de definitie van het rechterlid. $\square$

Een Tegenvoorbeeld

Toch is het vermoeden niet waar. De andere implicatie, naar links ($\Longleftarrow$) klopt niet. Een tegenvoorbeeld vinden we als volgt.

Bekijk de rij functies $f_n(x) = xn^2e^{-nx}$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $x \in [0,1]$.
Deze heeft de volgende eigenschappen:

(1):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Bewijs:

Als $x = 0$ dan klopt (1) omdat dan $f_n(x) = 0$ voor alle n.

Als $x \in (0,1]$ dan klopt (1) ook, omdat de e-macht sterker is dan n^2. $\square$

(2): $f_n(x)$ heeft een maximum van $\frac{n}{e}$ op $x = \frac{1}{n}$.

Bewijs:

De grafiek van $f_n(x)$ op $[0,1]$ is voor iedere n een berg en heeft precies één maximum. Deze vinden we door de afgeleide gelijk aan nul te stellen:

$$f_n'(x) = n^2e^{-nx} - xn^3e^{-nx} = n^2(1-xn)e^{-nx} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$1 - xn = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{n}, \text{ en:}$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e}, \text{ dit is het maximum. } \square$$

(3):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{puntsgewijs, maar niet uniform op } [0,1].$$

Bewijs:

De puntsgewijze convergentie is precies eigenschap (1). Voor uniforme convergentie moet $f_n(x)$ convergeren naar de nulfunctie $f(x) \equiv 0$ als n naar oneindig gaat, maar dat doet het niet, want op $x = \frac{1}{n}$ neemt de functie een maximum van $\frac{n}{e}$ aan. Dit maximum gaat naar oneindig als n naar oneindig gaat. Dus $f_n(x)$ kan nooit naar de nulfunctie convergeren. $\square$

We construeren nu ons tegenvoorbeeld door de grafieken van $f_n(x)$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $x \in [0,1)$ naast elkaar zetten in een assenstelsel. Dus op het interval $[0,1)$ van dat assenstelsel plaatsen we de grafiek van $f_1(x)$, op $[1,2)$ de grafiek van $f_2(x)$, etc. Hierdoor creëren we een functie $g(s)$ voor $s \in \mathbb{R}_+$ die als tegenvoorbeeld dient.

Maar er is nog één probleem: deze is niet continu op $s = n$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dit lossen we als volgt op:

Verander $f_n(x)$ in $F_n(x) = xn^2e^{-nx} - xf_n(1) = xn^2e^{-n}(e^x - 1)$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $x \in [0,1]$.

Dat wil zeggen: trek van de oude functie het rechte lijntje door $f_n(0) = 0$ en $f_n(1)$, af waardoor $F_n(0) = F_n(1) = 0$ en $g(s)$ dus continu op heel $\mathbb{R}_+$ wordt als we de grafieken van F_n aan elkaar plakken tot g. De eigenschappen (1),(2) en (3) van f_n gelden in grote lijnen natuurlijk ook voor F_n.

De functie $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is nu gegeven door:

$$g(s) = F_{[s]+1}(s - [s])$$

Nu laten we nog zien dat deze functie inderdaad een tegenvoorbeeld van het vermoeden is. We hebben g zo geconstrueerd uit F_n dat geldt: $F_n(x) = g(n + x)$. Uit dit laatste volgt met eigenschap (1) voor F_n, dat:

$$\lim_{n\to\infty} g(n + x) = 0 \qquad \forall\, x \in [0,1),$$

maar ook met eigenschap (3) voor F_n, dat niet:

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = 0.$$

Bij deze uitspraken maken we gebruik van de, bijna triviale, regel dat: $\forall\, x \in [0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} g(n + x) = L \iff \lim_{n\to\infty} F_n(x) = L$$

We hebben dus laten zien dat de implicatie naar links ($\Longleftarrow$) niet juist is in dit voorbeeld.
$\square$

Een Voorwaarde waarbij het Vermoeden wel waar is

We kunnen het vermoeden wel kloppend maken als we aan f een bepaalde voorwaarde opleggen. Stel f voldoet aan de Lipschitz-voorwaarden van orde β met een $\beta \in (0,1]$. Dat wil zeggen:

$$\exists\ \beta \in [0,1)\ \ \exists\ M \in \mathbb{R}\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}_+ : |f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|^{\beta} \qquad (1)$$

We laten nu zien dat de implicatie naar links ($\Longleftarrow$) dan ook geldt. Dus te bewijzen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ \Longleftarrow\ \lim_{n\to\infty} f(n+\alpha) = L \qquad \forall\ \alpha \in [0,1) \qquad (2)$$

Neem aan dat het rechterlid van (2) waar is. Dat wil zeggen:

$$\forall\ \alpha \in [0,1)\ \forall\ \theta > 0\ \exists\ N_{\theta,\ \alpha}\ \forall\ n > N_{\theta,\ \alpha} : |f(n+\alpha) - L| < \theta \qquad (3)$$

Verdeel ieder interval $[n, n+1]$ in p stukjes zodanig dat:
$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{2}{p}$, $\ldots$, $\alpha_p = \frac{p}{p} = 1$.

Zij nu:

$$N_\theta = \max_{i=0,1,\ldots,p} N_{\theta,\ \alpha_i},\ \text{met iedere } N_{\theta,\ \alpha_i} \text{ uit (3) gevonden.}$$

Dan hebben we:

$$\forall\ i = 0,1,\ldots,p\ \ \forall\ \theta > 0\ \ \exists\ N_\theta\ \forall\ n > N_\theta : |f(n+a_i) - L| < \theta \qquad (4)$$

Schrijf nu $x = n + \alpha$ met de juiste $n \in \mathbb{N}$ (dus $n = [x]$), en $\alpha \in [0,1)$. Neem een $\alpha_i \in \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ die het dichtst bij x ligt. Dan geldt:

$$|\alpha - \alpha_i| < \frac{1}{p} \qquad (5)$$

Dus geldt met (1) en met (5):

$$|f(x) - f(n+\alpha_i)| \leq M\,|x - (n+\alpha_i)|^{\beta} = M\,|\alpha - \alpha_i| \leq \frac{M}{p^{\ \beta}} \qquad (6)$$

We zien met de driehoeksongelijkheid en met (4) en (6):

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f(n+\alpha_i)| + |f(n+\alpha_i) - L| < \frac{M}{p^{\ \beta}} + \theta \qquad (7)$$

en dit geldt mits $n > N_\theta$ dus als $x > N_\theta + 1$.

Zij nu $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven. Dan weten we het volgende:

◇ We kunnen p groot genoeg kiezen zodat: $\frac{M}{p^{\ \beta}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

◇ We kunnen θ zo kiezen dat $\theta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Noem in deze situatie $r_\varepsilon = N_\theta + 1$.

Met het voorgaande en met (7) concluderen we:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ r_\varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \forall\ x > r_\varepsilon : |f(x) - L| < \frac{M}{p^{\ \beta}} + \theta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En dit is precies de definitie van het linkerlid van (2). $\square$